М. Е. ИВАНОВ, В. С. ПАВЛЕНКО

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРУКТУРЕ, КИНЕМАТИКЕ И КИНЕТОСТАТИКЕ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

«ВИЩА ШКОЛА»

М. Е. ИВАНОВ, В. С. ПАВЛЕНКО

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРУКТУРЕ, КИНЕМАТИКЕ И КИНЕТОСТАТИКЕ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1977

6П5.1
И20

УДК 621.01.(075)

Теория механизмов и машин. Решение задач по структуре, кинематике и кинетостатике плоских рычажных механизмов. Иванов М. Е., Павленко В. С. Киев, издательское объединение «Вища школа», 1977, 48 с.

В пособии дана методика решения задач по структуре, кинематике и кинетостатике плоских рычажных механизмов и подробно рассмотрен комплексный числовой пример по решению таких задач. Методическое пособие позволит студентам в значительной степени сократить затраты времени, а также избежать характерных ошибок при самостоятельном выполнении заданий по теории механизмов и машин.

Пособие предназначено для студентов немашиностроительных специальностей высших учебных заведений.

Табл. 4. Ил. 17. Список лит.: 4 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук В. И. Бобров, К. Н. Негребецкий

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению

Зав. ред. *О. А. Добровольский*

И $\frac{31301-342}{М211\ (04)-77}$ БЗ-1-13-77

Глава I. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел, называется механизмом.

Тела, из которых состоит всякий механизм, называются звеньями. Звенья механизма совершают различные, но взаимосвязанные движения. Это обусловливается тем, что они соединены друг с другом определенным образом.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой. Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются элементами звена.

В зависимости от видов элементов звеньев в кинематической паре одно звено может совершать относительно другого определенное количество тех или иных движений. Кинематические пары ограничивают подвижность звеньев, накладывают условия связи на относительные движения звеньев. По числу таких налагаемых условий связи они делятся на пять классов.

Кинематическая пара, выполненная соприкасанием элементов ее звеньев только по поверхности, называется низшей. Пара, выполненная соприкасанием элементов ее звеньев только по линиям или в точках, называется высшей.

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется кинематической цепью. В технике применяются обычно кинематические цепи, у которых одно из звеньев принимается за неподвижное, т. е. является стойкой. Рассматривая механизм как частный случай такой кинематической цепи, можно дать следующее определение механизма: механизм — это такая кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них

все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения [1].

Звенья, движения которых задаются, называются входными. Чаще входные звенья являются и ведущими [1].

Для проведения структурного анализа механизма составляется его схема. Схемой механизма называется его графическое изображение при помощи условного обозначения звеньев и кинематических пар без указания масштаба.

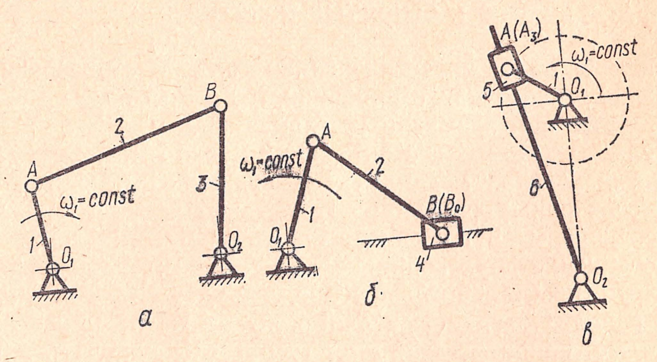


Рис. 1. Схемы механизмов:

а — кривошипно-коромыслового; *б* — кривошипно-ползунного; *в* —кривошипно-кулисного.

Чтобы выполнить кинематическое и силовое исследование механизма, необходимо составить его кинематическую схему. Кинематической схемой механизма называется его графическое изображение при помощи условного обозначения звеньев и кинематических пар, выполненное в масштабе.

Таблица условных обозначений звеньев и кинематических пар приведена в приложении.

На рис. 1 изображены схемы механизмов соответственно — кривошипно-коромыслового шарнирного четырехзвенника, кривошипно-ползунного и кулисного. На схемах звенья обозначены арабскими цифрами, кинематические пары — латинскими буквами. Во всех этих механизмах звено *1* является ведущим. Оно совершает вращательное движение (вокруг оси O_1) на угол 360° и называется кривошипом. Звено *2*, совершающее в механизмах (рис. 1, *а*, *б*) плоскопараллельное движение и не входящее в кинематические пары со стойкой, называется шатуном. Звено *3*

(рис. 1, *а*) совершает качательное движение относительно оси O_2 на угол меньше 360° и называется коромыслом. Звено *4* (рис. 1, *б*) совершает поступательное движение по неподвижной направляющей и называется ползуном. Звено *5* (рис. 1, *в*), перемещающееся по подвижной направляющей, называется кулисным камнем, а сама направляющая *6* — кулисой.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОДВИЖНОСТИ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Степень подвижности плоских механизмов определяется по формуле П. Л. Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где W — степень подвижности механизма; n — число подвижных звеньев механизма; p_5 — число кинематических пар V класса; p_4 — число кинематических пар IV класса.

Степень подвижности механизма определяет число ведущих звеньев его, т. е. количество звеньев, которым необходимо задать движение, чтобы все остальные звенья двигались по вполне определенным законам.

§ 3. СТРУКТУРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ ПО Л. В. АССУРУ—И. И. АРТОБОЛЕВСКОМУ

Структурной классификацией механизмов называется разделение их на группы и классы по общности структуры.

Рациональность любой классификации механизмов определяется выполнением следующих требований:

1. Классификация должна быть универсальной, т. е. охватывать все существующие и возможные новые механизмы.

2. Классификация должна определять пути исследования механизмов, т. е. показывать, какие методы надо применять при исследовании определенных механизмов.

3. Классификация должна указывать пути образования новых механизмов.

Впервые научно обоснованная, рациональная классификация плоских механизмов была предложена в 1914 г. русским ученым Л. В. Ассуром.

Дальнейшее развитие структурная классификация плоских механизмов получила в работах академика

И. И. Артоболевского, трудами которого ей была придана стройная последовательность, позволившая четко увязать классификацию с методами кинематического и силового расчета, особенно в группах высоких классов и порядков.

По Ассуру — Артоболевскому любой механизм можно образовать путем последовательного присоединения к ве-

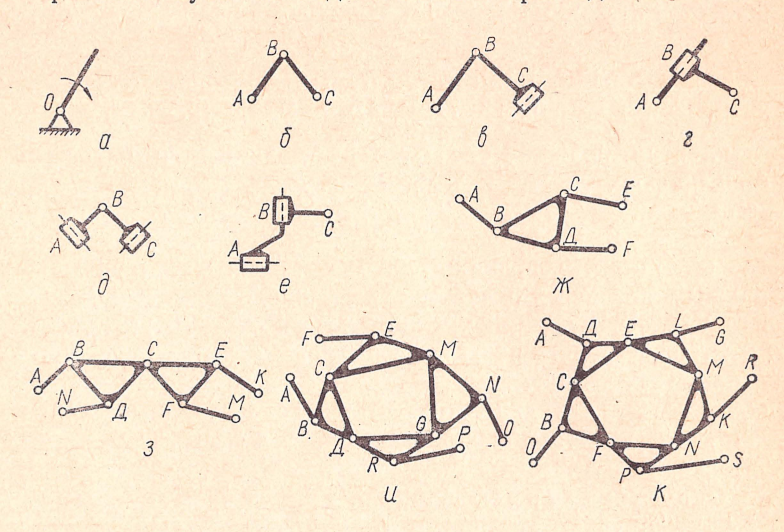


Рис. 2. Структурные группы:

а — исходный механизм I класса I порядка; *б* — группа II класса II порядка 1-го вида: *в* — группа II класса II порядка 2-го вида; *г* — группа II класса II порядка 3-го вида; *д* — группа II класса II порядка 4-го вида; *е* — группа II класса II порядка 5-го вида; *ж* — группа III класса III порядка; *з* — группа III класса IV порядка; *и* — группа IV класса IV порядка; *к* — группа V класса V порядка.

дущему звену (или ведущим звеньям) и к стойке кинематических цепей с нулевой степенью подвижности так называемых групп [2]. Эти группы называются группами Ассура, или структурными группами.

Группой Ассура называется простейшая кинематическая цепь с парами V класса, которая, будучи присоединена к стойке свободными элементами звеньев, обладает нулевой степенью подвижности.

В рассматриваемой классификации за исходный механизм принят механизм I класса I порядка (рис. 2, *а*). Степень подвижности его равна единице (здесь $n = 1$; $p_5 = 1$; $p_4 = 0$; $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$).

Для плоских механизмов с низшими парами структурная формула групп Ассура имеет вид

$$W = 3n - 2p_5 = 0,$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2} n.$$

Поскольку в группе не может быть дробное число кинематических пар, то группы Ассура должны состоять только из четного числа звеньев.

Чтобы из механизма выделять структурные группы, необходимо помнить их основные признаки, вытекающие из определения:

а) число звеньев в группе должно быть четным ($n = 2$, 4, 6, 8 и т. д.);

б) степень подвижности группы всегда равна нулю, например, группа III класса III порядка (рис. 2, *ж*) содержит $n = 4$; $p_5 = 6$; при этом $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$;

в) степень подвижности оставшейся части механизма при отсоединении групп Ассура не должна изменяться.

Элементарная (простейшая) группа, состоящая из двух звеньев и трех низших кинематических пар, называется группой II класса, или двухповодковой группой. Поводком называется звено, входящее в группе в две кинематические пары, одна из которых свободная и служит для присоединения к одному из подвижных звеньев механизма или к стойке. Порядок структурных групп определяется числом поводков.

Группы II класса II порядка подразделяются на пять модификаций (видов), в зависимости от количества вращательных и поступательных пар и их взаимного расположения в группах. Примеры групп II класса II порядка всех модификаций приведены на рис. 2, *б—е*, соответственно от 1 до 5.

На рис. 2, *ж* изображена группа, состоящая из четырех звеньев и шести пар V класса. Отличительная особенность этой группы — звено *BCD*, входящее в три кинематические пары и образующее некоторый жесткий треугольный замкнутый контур. Это звено принято называть базисным. В группу входят три поводка: *AB*, *CE*, *DF*. Такая группа называется группой III класса III порядка.

Аналогична ей группа, приведенная на рис. 2,*з*. Однако у последней имеется четыре поводка — *AB*, *ND*, *FM*, *EK* — и группа эта III класса IV порядка.

На рис. 2, *и* изображена группа, в состав которой входит замкнутый четырехсторонний подвижный контур. Это группа IV класса IV порядка. Группа V класса показана на рис. 2, *к*.

Произвести структурный анализ механизма — это значит установить, из каких групп звеньев (исходного механизма и групп Ассура) состоит данный механизм и в какой последовательности эти группы звеньев присоединяются друг к другу; определить класс и порядок механизма. При структурном анализе механизм расчленяется на отдельные структурные группы. Выделение из механизма групп Ассура можно начинать с группы, наиболее удаленной от ведущего звена, с таким расчетом, чтобы при этом не нарушалась определенность движения оставшихся звеньев.

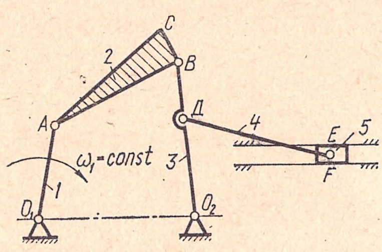


Рис. 3. Схема механизма.

Таблица 1

Обозначение кинематической пары	Номера звеньев, образующих пару	Характер относительного движения звеньев	Класс кинематической пары
O_1	*0* и *1*	Вращательное	V
A	*1* и *2*	»	V
B	*2* и *3*	»	V
O_2	*3* и *0*	»	V
D	*3* и *4*	»	V
E	*4* и *5*	»	V
F	*5* и *0*	Поступательное	V

Класс и порядок механизма в целом определяется классом и порядком самой сложной его структурной группы.

Результаты структурного анализа механизма зависят в общем случае от того, какое из звеньев исследуемого механизма принято в качестве ведущего.

Пример. Произвести структурный анализ механизма, представленного на рис. 3.

Р е ш е н и е. Механизм имеет пять подвижных звеньев. Названия звеньев: *1* — кривошип; *2* — шатун; *3* — коромысло; *4* — шатун; *5* — ползун.

Стойка принята за нулевое звено. Звенья соединены между собой семью кинематическими парами V класса (на схеме они обозначены буквами латинского алфавита). Данные о кинематических парах сводим в табл. 1 .

Определяем степень подвижности механизма по формуле

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где $n = 5$ — число подвижных звеньев; $p_5 = 7$ — число кинематических пар V класса; $p_4 = 0$ — число кинематических пар IV класса.

Тогда

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Это значит, что в данном механизме должно быть одно ведущее звено. В качестве ведущего звена принято звено *1* — кривошип.

Раскладываем механизм на структурные группы. Прежде всего, отсоединяем группу Ассура, состоящую из звеньев *4* и *5* и трех кинематических пар: вращательных D и E и поступательной F (рис. 4, *а*). Степень подвижности этой группы после присоединения к стойке

$$W = 3n - 2p_5 = \\ = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

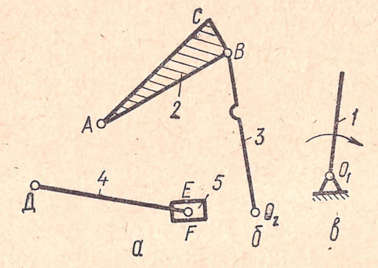


Рис. 4. Структурный анализ механизма:

а — группа II класса II порядка 2-го вида; *б* — группа II класса II порядка 1-го вида; *в* — механизм I класса I порядка.

Группа *4—5* является группой II класса II порядка 2-го вида.

Затем отсоединяем группу, состоящую из звеньев *2* и *3* и трех вращательных пар A, B и O_2 (рис. 4, *б*). Это группа II класса II порядка 1-го вида.

После отсоединения указанных групп остался исходный механизм, состоящий из кривошипа *1*, присоединенного к стойке кинематической парой O_1 (рис. 4, *в*), и обладающий степенью подвижности

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Это механизм I класса I порядка.

В целом рассматриваемый механизм является механизмом II класса II порядка.

Глава II. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

Основными задачами кинематического исследования механизмов являются:

а) определение положений звеньев (построение планов положений механизма);

б) построение траекторий точек;

в) определение скоростей и ускорений точек;

г) определение угловых скоростей и ускорений звеньев.

Существуют три основных метода кинематического исследования механизмов:

1) метод графиков (наименее точный и наименее трудоемкий);

2) метод планов (более точный и более трудоемкий);

3) аналитический (самый точный и самый трудоемкий).

Здесь ограничимся рассмотрением графических методов (метода графиков и метода планов). Как известно, применение этих методов связано с использованием масштабов.

Под масштабом при применении графических методов анализа механизмов подразумевается отношение действительной величины, выраженной в соответствующих единицах, к длине отрезка, изображающего эту величину, выраженной в миллиметрах. При построении кинематических схем и планов положений механизмов определяется масштаб длин. Например (см. рис. 5), масштаб длин

$$\mu_l = \frac{l_{O_1A}}{O_1A},$$

где l_{O_1A} — действительная длина кривошипа, м;

O_1A — длина отрезка, изображающего кривошип, мм.

При построении планов скоростей используется масштаб скоростей μ_v.

Если, например, действительная величина скорости точки A будет v_A, а длина отрезка, изображающего эту скорость — pa, то масштаб скоростей

$$\mu_v = \frac{v_A}{pa}.$$

Аналогично определяются масштабы ускорений, сил и т. п.

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМА

Планом положения механизма называется чертеж, изображающий расположение его звеньев в какой-либо определенный момент движения. Отсюда следует, что план положения представляет собой кинематическую схему механизма, вычерченную для заданного положения кривошипа.

Планы положений механизмов, включающих в себя двухповодковые группы, строятся методом засечек.

Рассмотрим это на примере.

Пример 1. Построить план положения механизма (рис. 5) для заданного угла поворота φ ведущего звена при $l_{O_1A} = 0{,}03$ м; $l_{O_1O_2} = 0{,}055$ м; $l_{AB} = 0{,}05$ м; $l_{O_2B} = 0{,}045$ м; $l_{AC} = l_{BC} = 0{,}027$ м; $l_{O_2D} = 0{,}024$ м; $l_{DE} = 0{,}06$ м; смещение $a' = 0{,}015$ м и угол $\varphi = 55°$.

Решение. Для построения плана принимаем, что длину кривошипа l_{O_1A} на схеме будет изображать отрезок O_1A, длина которого равна 30 мм. Тогда масштаб длин плана

$$\mu_l = \frac{l_{O_1A}}{O_1A} = \frac{0{,}03}{30} = 0{,}001 \text{ м/мм}.$$

Затем вычисляем длины остальных отрезков, которые будем откладывать на чертеже:

$$O_1O_2 = \frac{l_{O_1O_2}}{\mu_l} = \frac{0{,}055}{0{,}001} = 55 \text{ мм};$$

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = 50 \text{ мм}; \quad AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = 27 \text{ мм};$$

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = 27 \text{ мм}; \quad O_2B = \frac{l_{O_2B}}{\mu_l} = 45 \text{ мм};$$

$$O_2D = \frac{l_{O_2D}}{\mu_l} = 24 \text{ мм}; \quad DE = \frac{l_{DE}}{\mu_l} = 60 \text{ мм};$$

$$a' = \frac{a'}{\mu_l} = 15 \text{ мм}.$$

Построение плана начинаем с нанесения элементов неподвижного звена. Штрих-пунктирной линией проводим линию центров O_1O_2 и на ней наносим точки O_1 и O_2 на расстоянии $O_1O_2 = 55$ мм. На расстоянии a' от линии O_1O_2 проводим траекторию движения точки E.

Под углом $\varphi = 55°$ к линии O_1O_2 через точку O_1 проводим ось ведущего звена и от этой точки откладываем на ней

отрезок O_1A. Это и будет изображение ведущего звена O_1A в заданном положении.

Положение точки B определяем методом засечек. Для этого из точки A радиусом AB, а из точки O_2 радиусом O_2B проводим дуги. Точка их пересечения и будет точкой B.

На звене O_2B находим положение точки D. Сделав радиусом DE из точки D засечку на траектории движения точки E, определяем положение этой точки на схеме. Положение точки C находим на пересечении дуг радиусов AC и BC.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ТОЧЕК

Чтобы построить траекторию какой-либо точки, нужно построить несколько планов положений механизма, найти на каждом из этих планов положение заданной точки и последовательно соединить полученные точки плавной кривой (рис. 5).

Обычно планы положений механизма строятся для нескольких равноотстоящих положений ведущего звена O_1A. Для этого окружность — траектория точки A — делится на несколько равных частей. Одно из положений точки A принимается за нулевое, а остальные пронумеровываются в направлении вращения звена O_1A. За нулевое положение точки A кривошипа выбирают такое, при котором дальнейшее движение точки A в заданную сторону вращения будет соответствовать рабочему ходу исполнительного звена механизма.

Пример 2. Для механизма по условию примера 1 построить планы положений по восьми равноотстоящим положениям звена O_1A, начертить траекторию точки S_2 и разместить траекторию точки B, если $l_{AS_2} = 0{,}02$ м (рис. 5).

Р е ш е н и е. Кривошип совершает полное круговое движение и траекторией движения точки A будет окружность радиуса O_1A. Проводим эту окружность. Поскольку коромысло совершает качательное движение, то точка B движется по дуге окружности радиуса O_2B. Для разметки траектории точки B необходимо на дуге радиуса O_2B найти крайние положения точки B.

Точка B занимает крайнее левое положение тогда, когда длина O_1A кривошипа вычитается из длины AB шатуна, и крайнее правое,— когда эти длины складываются. Для

нахождения крайних положений точки B делаем две засечки из центра O_1 радиусами $r_{\min} = AB - O_1A$ и $r_{\max} = AB + O_1A$ на дуге радиуса O_2B. Получаем точки B_0 и B_m.

На пересечении прямой B_0O_1 с окружностью радиуса O_1A находим точку A_0, а на пересечении прямой B_mO_1 с этой окружностью — точку A_m.

Два крайних положения O_1A_0 и O_1A_m кривошипа делят полный оборот (угол 360°) его на два неравных по величине

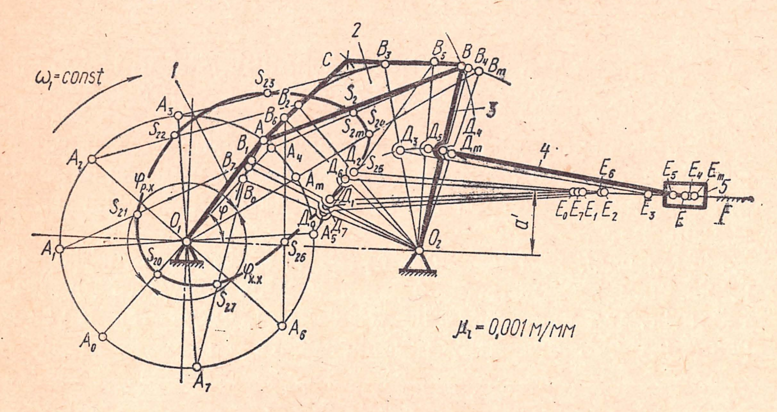


Рис. 5. Планы положений механизма и траекторий точек.

угла. Больший из них обычно соответствует рабочему ходу исполнительного звена механизма, меньший — холостому ходу. На рис. 5 эти углы обозначены соответственно φ_{px} и φ_{xx}.

Чтобы при дальнейшем движении в заданную сторону вращения точка A кривошипа двигалась в направлении рабочего хода исполнительного звена механизма, за нулевое положение принимаем крайнее левое положение точки A, обозначенное A_0 (рис. 5).

Соединяем точки B_0 и B_m с точкой O_2, находим положения точек D_0, D_m, E_0, E_m и получаем два положения механизма, соответствующие крайним положениям точки B.

Чтобы упростить дальнейшее построение, положения точки C не наносим.

Разбиваем окружность радиуса O_1A, начиная от точки A_0, на восемь равных частей и нумеруем точки деления в направлении вращения звена O_1A. Используя метод

засечек, строим первое, второе и все последующие положения механизма.

Определяем длину отрезка

$$AS_2 = \frac{l_{AS_2}}{\mu_l} = \frac{0,02}{0,001} = 20 \text{ мм}$$

и находим положения точек S_{20}, S_{21}, S_{22} и т. д.

Соединяем полученные точки плавной кривой. Это и будет траектория точки S_2.

§ 7. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ГРАФИКОВ

С помощью графиков перемещений, скоростей и ускорений какой-либо точки можно проследить изменение кинематических параметров точки за полный цикл движения механизма.

Имея один из графиков, путем графического дифференцирования или интегрирования можно получить два остальных, так как между перемещением, скоростью и ускорением точки существует зависимость

$$v = \frac{dS}{dt}; \; a = \frac{dv}{dt},$$

т. е. скорость точки в определенный момент времени представляет собой первую производную от перемещения точки по времени, а ускорение — первую производную от скорости по времени. Следовательно, имея график перемещений точки, можно путем дифференцирования его получить график скоростей, а путем дифференцирования графика скоростей — график ускорений.

Если исследуется движение точки, совершающей поступательное движение, то для нее строится график линейных перемещений.

Если же исследуется движение точки, совершающей вращательное движение, то для нее строится график линейных перемещений (при этом надо очень тщательно измерять перемещение точки по дуге) или график угловых перемещений звена, к которому относится заданная точка. При дифференцировании графика угловых перемещений получится соответственно график угловых скоростей, а при дифференцировании последнего — график угловых ускорений.

Известно несколько методов графического дифференцирования. Предпочтительными из них являются метод касательных и метод хорд.

Пример 3. Для механизма (рис. 5) построить график перемещений точки B и, дифференцируя его методом касательных, график скоростей этой точки. Кривошип O_1A имеет частоту вращения $n_1 = 120$ об/мин.

Р е ш е н и е. Строим систему координат графика перемещений (рис. 6). По оси ординат будем откладывать перемещение точки B, по оси абсцисс — время. Откладываем время одного цикла движения механизма произвольным отрезком $O—O$. При длительности цикла

$$T = \frac{60}{n_1} = \frac{60}{120} = 0{,}5 \text{ с}$$

и длине отрезка $O—O$, равной 80 мм, масштаб времени по оси абсцисс

$$\mu_t = \frac{T}{O-O} = \frac{0{,}5}{80} = 0{,}00625 \text{ с/мм}.$$

Делим отрезок $O—O$ на восемь равных частей. Точки 1, 2, 3 и т. д. соответствуют моментам времени, когда механизм занимает 1, 2, 3-е и т. д. положения.

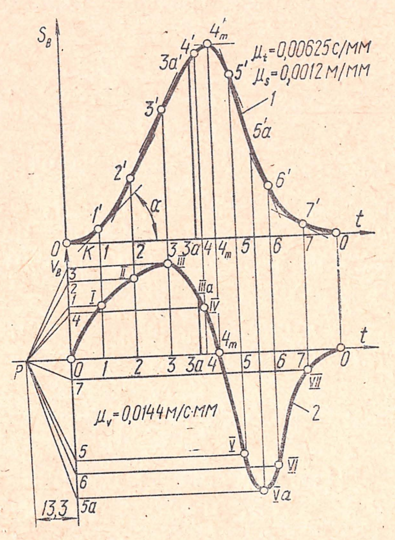


Рис. 6. Графики перемещений и скоростей точки B.

Перемещение точки B при движении механизма из нулевого положения в первое выражается дугой B_0B_1. Если дугу B_0B_1 измерить непосредственно на схеме механизма и отложить ординатой $1—1'$, равной ее длине на схеме, то масштаб μ_s перемещений графика совпадает с масштабом μ_l длин схемы механизма.

Дугу B_0B_1 можно подсчитать как $\overset{\frown}{B_0B_1} = l_{O_2B}\theta_1$ и отложить произвольной ординатой $1—1'$. Тогда масштаб перемещений графика

$$\mu_s = \frac{l_{O_2B}\theta_1}{57{,}3y_{1-1'}},$$

где l_{O_2B} — действительная длина звена O_2B, м; θ_1 — угол $B_0O_2B_1$, град; 57,3 — переводной коэффициент; $y_{1-1'}$ — ордината 1—1' графика перемещений, мм.

Однако для того чтобы рационально использовать поле чертежа, т. е. чтобы график был не слишком сжат и не слишком вытянут, удобно задаться максимальной ординатой $y_{4_m-4'_m}$. Принимаем эту ординату равной 57 мм. Откладывать ее надо из точки 4_m, положение которой на оси абсцисс графика перемещений находим из соотношения

$$\frac{l_{4-4_m}}{l_{4-5}} = \frac{\breve{A_4A_m}}{\breve{A_4A_5}},$$

где l_{4-4_m} и l_{4-5} — длины отрезков на оси абсцисс графика перемещений; $\breve{A_4A_m}$ и $\breve{A_4A_5}$ — отрезки траектории точки A, соответствующие переходу механизма из четвертого положения в положение максимального удаления точки B и в пятое положение.

По рис. 5 $\breve{A_4A_m} = 9$ мм, $\breve{A_4A_5} = 23{,}5$ мм; по рис. 6, *1* $l_{4-5} = 10$ мм;

$$l_{4-4_m} = \frac{l_{4-5}\breve{A_4A_m}}{\breve{A_4A_5}} = \frac{10 \cdot 9}{23{,}5} = 3{,}84 \approx 4 \text{ мм}.$$

Из полученной точки 4_m откладываем ординату $y_{4_m-4'_m} = 57$ мм.

Определяем масштаб графика перемещений по формуле

$$\mu_s = \frac{l_{O_2B}\theta_{max}}{57{,}3 y_{4_m-4'_m}} = \frac{0{,}045 \cdot 86{,}5}{57{,}3 \cdot 57} = 0{,}0012 \text{ м/мм},$$

где l_{O_2B} — действительная длина коромысла, м; θ_{max} — максимальный угол качания коромысла ($\angle B_0O_2B_m$), град.

Определяем длины ординат *1—1'*; *2—2'*; *3—3'* и т. д. графика перемещений точки B, предварительно измерив соответствующие углы θ_1, θ_2, θ_3 и т. д. ($\angle B_0O_2B_1$; $\angle B_0O_2B_2$; $\angle B_0O_2B_3$ и т. д.):

$$y_{1-1'} = \frac{l_{O_2B}\theta_1}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 6}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 4 \text{ мм};$$

$$y_{2-2'} = \frac{l_{O_2B}\theta_2}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 29}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 19 \text{ мм};$$

$$y_{3-3'} = \frac{l_{O_2B}\theta_3}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 59}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 38{,}6 \text{ мм;}$$

$$y_{4-4'} = \frac{l_{O_2B}\theta_4}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 82{,}5}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 54 \text{ мм;}$$

$$y_{5-5'} = \frac{l_{O_2B}\theta_5}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 72}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 47{,}2 \text{ мм;}$$

$$y_{6-6'} = \frac{l_{O_2B}\theta_6}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 22}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 14{,}4 \text{ мм;}$$

$$y_{7-7'} = \frac{l_{O_2B}\theta_7}{57{,}3\mu_s} = \frac{0{,}045 \cdot 3{,}5}{57{,}3 \cdot 0{,}0012} = 2{,}3 \text{ мм.}$$

Из точек *1*, *2*, *3* и т. д. на оси абсцисс откладываем полученные расчетом ординаты $y_{1-1'}$; $y_{2-2'}$; $y_{3-3'}$ и т. д. Полученные точки *O*, *1'*; *2'*; *3'* и т. д. соединяем плавной кривой (рис. 6, *1*). Это и будет график линейных перемещений точки *B*: $S_B = S_B(t)$.

Чтобы определить удаление точки *B* в заданном (по условию примера 2 углом $\varphi = 55°$) положении механизма от ее начального положения B_0, находим точку 3_a на оси абсцисс графика (по аналогии с определением положения точки 4_m), соответствующую положению точки *A* кривошипа на ее траектории (между *3* и *4* положениями) и проводим ординату $3_a — 3'_a$:

$$S_B = y_{3_a-3'_a}\mu_s = 52 \cdot 0{,}0012 = 62{,}5 \text{ мм.}$$

Для построения графика скоростей точки *B*

$$v_B = v_B(t)$$

полученный график продифференцируем методом касательных. С этой целью в точках *1'*, *2'*, *3'* и т. д. к кривой графика

$$S_B = S_B(t)$$

проводим касательные.

Под графиком перемещений точки *B* строим новую систему координат для графика скоростей. Влево от начала этой системы координат (точка *O*) на оси абсцисс произвольно выбираем полюс *p* (рис. 6, *2*). Из него проводим лучи, параллельные касательным в точках *1'*, *2'*, *3'* и т. д. графика перемещений, до пересечения с осью ординат (скоростей) в точках соответственно *1*, *2* и т. д. Отрезки *0—1*, *0—2* и т. д. на оси ординат нового графика пропорциональ-

ны скоростям точки B в первом, втором и т. д. положениях механизма.

Далее, на оси ординат точки *1*, *2*, *3* и т. д. проецируем соответственно на перпендикуляры к оси абсцисс, восставленные из точек *1*, *2*, *3* и т. д. деления отрезка O—O этой оси. Получаем точки I, II, III и т. д. дифференциальной кривой. Поскольку за начальное положение механизма принято одно из крайних его положений, т. е. скорость точки B в этот момент равна нулю, то график скоростей будет исходить из начала системы координат. Соединяем точки O, I, II, III и т. д. плавной кривой, учитывая, что она пройдет через нуль в точке 4_m, соответствующей экстремальному значению функции перемещений (рис. 6, 2).

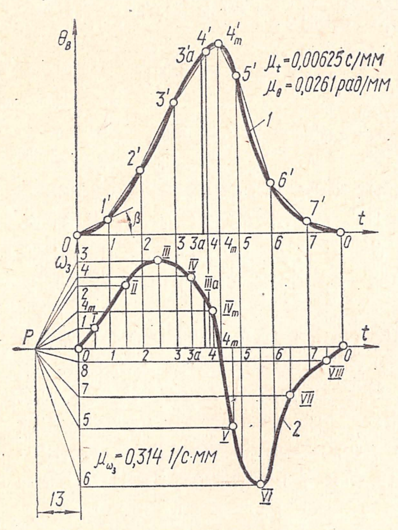


Рис. 7. Графики угловых перемещений и угловых скоростей звена *3*.

Из построений следует, что ординаты графика $v_B = v_B(t)$ пропорциональны значениям скоростей в различных положениях механизма.

По известной формуле определяем коэффициент пропорциональности — масштаб скоростей:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t Op} = \frac{0{,}0012}{0{,}00625 \cdot 13{,}3} = 0{,}0144 \text{ м/с·мм},$$

где $Op = 13{,}3$ мм — полюсное расстояние (рис. 6, *2*).

Чтобы определить значения скорости точки B в заданном (углом $\varphi = 55°$) положении механизма, находим на оси абсцисс графика скоростей точку 3_a (сносим по вертикали с графика перемещений), соответствующую заданному моменту времени, и через нее проводим ординату 3_a—III_a:

$$v'_B = y_{(3_a - \text{III}_a)}\mu_v = 17 \cdot 0{,}0144 = 0{,}245 \text{ м/с}.$$

Пример 4. По условию примера 3 построить график угловых перемещений звена O_2B и дифференцируя его методом хорд — график угловых скоростей этого звена.

Р е ш е н и е. Строим систему координат графика угловых перемещений звена O_2B (рис. 7).

По оси ординат откладываем углы поворота этого звена относительно начального положения, по оси абсцисс — время. Длину отрезка $O—O$, который изображает время одного цикла движения механизма, принимаем равной 80 мм. Определяем масштаб времени

$$\mu_t = \frac{T}{O-O} = \frac{60}{120 \cdot 80} = 0{,}00625 \text{ с/мм}.$$

Углы поворота звена O_2B относительно начального положения измеряем непосредственно на схеме механизма (см. рис. 5) и откладываем на графике ординатами $1—1'$, $2—2'$ и т. д. в масштабе μ_θ. Задаемся величиной максимальной ординаты графика $4_m—4'_m$ (принимаем 57,7 мм) из условия рационального использования поля чертежа. Определяем значение масштаба:

$$\mu_\theta = \frac{\theta_{max}}{57{,}3 y_{4m-4'm}} = \frac{86{,}5}{57{,}3 \cdot 57{,}7} = 0{,}0261 \text{ рад/мм},$$

где $\theta_{max} = 86{,}5°$ — угол между двумя крайними положениями звена O_2B.

Измерив углы отклонения звена O_2B во всех положениях механизма от начального, вычисляем с учетом масштаба μ_θ размеры соответствующих ординат $1—1'$; $2—2'$; $3—3'$ и т. д. (вычисления здесь не приведены) и откладываем их на графике от точек *1*, *2*, *3* и т. д. оси времени. Положение точки 4_m на оси абсцисс графика определяем по аналогии с предыдущим примером.

Соединив точки *0*, *1'*, *2'*, *3'* и т. д. плавной кривой, получаем график угловых перемещений звена O_2B (рис. 7, *1*).

Чтобы определить угловое перемещение звена O_2B в заданном (углом $\varphi = 55°$) положении механизма, найдем на оси абсцисс точку 3_a, соответствующую заданному моменту времени, и через нее проводим ординату $3_a—3'_a$:

$$\theta = y_{3_a-3'_a} \mu_\theta = 51{,}5 \cdot 0{,}0261 = 1{,}345 \text{ рад}.$$

Дифференцируя полученный график методом хорд, строим график угловых скоростей. Для этого на графике $\theta = \theta(t)$ точки *0*, *1'*, *2'*, *3'* и т. д. последовательно соединим хордами. Под этим графиком (рис. 7,*2*) строим новую

систему координат (ω, t) и слева от начала 0 этой системы откладываем произвольный отрезок — полюсное расстояние Op. Из полюса p параллельно хордам 0—$1'$, $1'$—$2'$, $2'$—3 и т. д. проводим лучи до пересечения с осью ординат соответственно в точках 1, 2, 3 и т. д. Отрезки 0—1, 0—2, 0—3 и т. д. на оси ординат графика пропорциональны средним угловым скоростям звена O_2B на соответствующих участках.

При построении графика угловых скоростей ординаты 0—1, 0—2 и т. д. следует откладывать в средних точках соответствующих участков времени, так как эти ординаты пропорциональны средним угловым скоростям. Поэтому участки 0—1, 1—2 и т. д. и участки 4—4_m и 4_m—5 на оси абсцисс делим пополам. Через точки деления проводим вертикальные линии, на которые сносим по горизонтали соответственно точки 1, 2, 3 и т. д. с оси ординат. Точки 0, I, II, III, IV, IV_m и т. д. соединяем плавной кривой, учитывая, что кривая угловых скоростей пересечет ось абсцисс в точке 4_m, соответствующей экстремальному значению функции угловых перемещений, и получаем график угловых скоростей звена O_2B:

$$\omega = \omega(t).$$

Поскольку метод хорд является приближенным методом графического дифференцирования, то естественно ожидать, что ординаты графика $\omega = \omega(t)$, построенного с помощью этого метода, приблизительно пропорциональны значениям угловых скоростей $\frac{d\theta}{dt}$.

Чтобы определить угловые скорости звена O_2B в различных положениях механизма, нужно соответствующие ординаты графика $\omega = \omega(t)$ умножить на масштаб угловых скоростей:

$$\mu_\omega = \frac{\mu_\theta}{\mu_t Op} = \frac{0{,}0261}{0{,}00625 \cdot 13} = 0{,}314 \ \ 1/\text{с} \cdot \text{мм},$$

где $Op = 13$ мм — полюсное расстояние.

Для определения значения угловой скорости звена O_2B в заданном (углом $\varphi = 55°$) положении механизма находим на оси абсцисс построенного графика точку 3_a, соответствующую заданному моменту времени, и через нее проводим ординату 3_a—III_a. Угловая скорость звена O_2B

$$\omega'_{3a} = y_{(3_a - III_a)}\mu_\omega = 17 \cdot 0{,}314 = 5{,}35 \ \ 1/\text{с}.$$

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ ПЛАНОВ СКОРОСТЕЙ

Зная закон движения ведущего звена и длины всех звеньев механизма, можно определить скорости его точек по величине и направлению в любом положении механизма путем построения плана скоростей для этого положения.

Построение планов скоростей и чтение их во многом упрощаются при использовании свойств этих планов, которые заключаются в следующем:

1. Векторы, исходящие из полюса, выражают абсолютные скорости соответствующих точек звеньев механизма в масштабе плана скоростей. Точки плана скоростей, соответствующие неподвижным точкам механизма, находятся в полюсе.

2. Векторы, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей, выражают величины и направления относительных скоростей.

3. Векторы относительных скоростей точек звена на плане скоростей образуют фигуру, подобную одноименной жесткой фигуре, образованной отрезками, соединяющими эти точки звена на плане механизма, повернутую по отношению к последней на 90° в сторону мгновенного вращения данного звена.

Пример 5. Определить абсолютные и относительные скорости точек звеньев и угловые скорости звеньев механизма (см. рис. 5) методом планов скоростей для положения его, указанного в примере 1 ($\varphi = 55°$), кривошип O_1A имеет частоту вращения $n_1 = 120$ об/мин в сторону, указанную круговой стрелкой. Размеры звеньев — те же. Дополнительно заданы положения центров тяжести:

$$l_{O_1S_1} = 0{,}014 \text{ м}; \quad l_{AS_2} = 0{,}02 \text{ м};$$
$$l_{O_2S_3} = 0{,}028 \text{ м}; \quad l_{ES_4} = 0{,}023 \text{ м}.$$

Решение. Принимая длину отрезка O_1A, изображающего кривошип, равной 20 мм, определяем масштаб длин

$$\mu_l = \frac{l_{O_1A}}{O_1A} = \frac{0{,}03}{20} = 0{,}0015 \text{ м/мм}.$$

В этом масштабе вычерчиваем план положения заданного механизма (рис. 8, *а*).

Определяем угловую скорость кривошипа O_1A по формуле

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 120}{30} = 12{,}56 \ 1/\text{с}.$$

Находим скорость точки A кривошипа O_1A по формуле

$$v_A = \omega_1 l_{O_1A} = 12{,}56 \cdot 0{,}03 = 0{,}377 \ \text{м/с}.$$

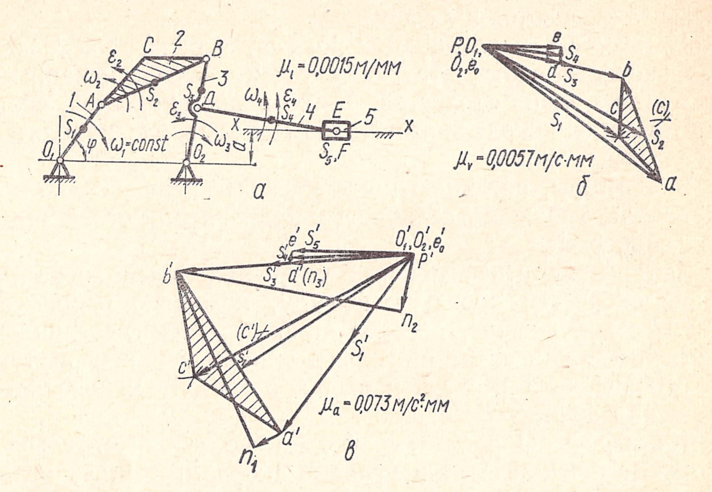


Рис. 8. Кинематическое исследование механизма методом планов:

а — план механизма; *б* — план скоростей; *в* — план ускорений.

Вектор $\bar{v}_A$ направлен перпендикулярно к оси звена O_1A в сторону его вращения.

Задаемся длиной отрезка pa, который будет изображать на плане скорость $\bar{v}_A$, точки A; $pa = 66$ мм. Масштаб плана скоростей

$$\mu_v = \frac{v_A}{pa} = \frac{0{,}377}{66} = 0{,}0057 \ \text{м/с} \cdot \text{мм}.$$

От произвольной точки p, принятой за полюс плана скоростей, откладываем перпендикулярно к звену O_1A отрезок pa (рис. 8, *б*).

Скорости неподвижных точек O_1 и O_2 равны нулю, поэтому векторы $\overline{pO_1}$ и $\overline{pO_2}$ также равны нулю и, следова-

тельно, токи O_1 и O_2 на плане скоростей совпадают с полюсом p.

Из теоретической механики известно, что скорость какой-либо точки звена (например, точки B) может быть представлена в виде суммы переносной и относительной скоростей. Поэтому для определения скорости точки B воспользуемся векторными уравнениями:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad (1)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{BO_2}, \quad (2)$$

где $\bar{v}_A$ — скорость точки A; $\bar{v}_{BA}$ — относительная скорость точки B во вращении вокруг точки A; $\bar{v}_{O_2}$ — скорость точки O_2; $\bar{v}_{BO_2}$ — относительная скорость точки B во вращении вокруг точки O_2.

В этих уравнениях скорость $\bar{v}_A$ известна по величине и направлению, скорость $\bar{v}_{O_2} = 0$. Относительные скорости $\bar{v}_{BA}$ и $\bar{v}_{BO_2}$ известны лишь по линии действия: $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярна к звену AB, $\bar{v}_{BO_2}$ перпендикулярна к звену O_2B. Поэтому для определения скорости $\bar{v}_B$ точки B через точку a (конец вектора скорости $\bar{v}_A$) проводим перпендикулярно к звену AB линию действия скорости $\bar{v}_{BA}$, а через точку O_2, совпадающую с полюсом p плана скоростей, проводим перпендикулярно к звену O_2B линию действия скорости $\bar{v}_{BO_2}$. На пересечении этих двух линий действия получим точку b — конец вектора скорости $\bar{v}_B$ точки B:

$$v_B = pb\mu_v = 42 \cdot 0{,}0057 = 0{,}24 \text{ м/с}.$$

Направление скорости $\bar{v}_B$ определяется направлением вектора $\overline{pb}$.

Согласно уравнению (1) вектор $\overline{ab}$ изображает скорость $\bar{v}_{BA}$ точки B в относительном вращении вокруг точки A:

$$v_{BA} = ab\mu_v = 33 \cdot 0{,}0057 = 0{,}188 \text{ м/с}.$$

Согласно уравнению (2) вектор $\overline{o_2b}$ ($\overline{pb}$) изображает скорость $\bar{v}_{BO_2}$ точки B в относительном вращении вокруг точки O_2:

$$v_{BO_2} = v_B = 0{,}24 \text{ м/с}.$$

Положение точки c (конец вектора скорости точки C) определяем на плане скоростей по теореме подобия (третье свойство планов скоростей). На отрезке ab плана скоростей строим треугольник abc, подобный треугольнику ABC звена 2. Определяем длины отрезков ac и bc из пропорций

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB} \text{ и } \frac{bc}{ab} = \frac{BC}{AB}.$$

Поскольку $AC = BC$, то

$$ac = bc = \frac{abAC}{AB} = \frac{33 \cdot 18}{33{,}3} = 17{,}8 \text{ мм.}$$

Из точек a и b плана скоростей радиусами, равными соответственно отрезкам ac и bc, делаем засечки. Получаем две точки пересечения этих дуг, справа и слева от вектора $\overline{ab}$. За точку c плана скоростей следует взять ту из полученных точек, при которой порядок букв в треугольниках abc и ABC будет одинаковым. Так, например, при обходе сторон $\triangle ABC$ звена 2 по направлению вращения часовой стрелки читаем: $A \to C \to B$. Порядок букв в треугольнике abc при обходе сторон треугольника также по часовой стрелке должен сохраниться $a \to c \to b$. Следовательно, точка c плана скоростей будет слева от вектора $\overline{ab}$.

Соединяем полюс плана скоростей p с точкой c и определяем величину скорости точки C:

$$v_C = pc\mu_v = 48 \cdot 0{,}0057 = 0{,}274 \text{ м/с.}$$

Согласно тому же свойству планов скоростей находим положение точки d на плане исходя из пропорции

$$\frac{o_2d}{O_2D} = \frac{o_2b}{O_2B}.$$

В этом случае фигура относительных скоростей o_2db на плане скоростей будет прямой по подобию с прямой O_2B механизма:

$$o_2d = \frac{o_2b\ O_2D}{O_2B} = \frac{42 \cdot 16}{30} = 22{,}4 \text{ мм.}$$

Определив положение точки d на плане скоростей, находим величину скорости

$$v_D = pd\mu_v = 22{,}4 \cdot 0{,}0057 = 0{,}128 \text{ м/с.}$$

Скорость точки E шатуна DE представляем в виде векторной суммы переносной и относительной скоростей. Для ее определения воспользуемся векторными уравнениями:

$$\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{v}_{ED}; \quad (3)$$

$$\bar{v}_E = \bar{v}_{E_0} + \bar{v}_{EE_0}, \quad (4)$$

где $\bar{v}_D$ — скорость точки D; $\bar{v}_{ED}$ — относительная скорость точки E во вращении вокруг точки D; $\bar{v}_{E_0}$ — скорость точки E_0, принадлежащей стойке и совпадающей в данный момент с точкой E ползуна; $\bar{v}_{EE_0}$ — скорость точки E в поступательном движении относительно точки E_0.

В этих уравнениях скорость $\bar{v}_D$ известна по величине и направлению, скорость $\bar{v}_{E_0} = 0$. Относительные скорости $\bar{v}_{ED}$ и $\bar{v}_{EE_0}$ известны лишь по линиям действия: $\bar{v}_{ED}$ перпендикулярна к звену DE, $\bar{v}_{EE_0}$ параллельна оси направляющих ползуна. Для определения скорости точки E через точку d плана скоростей проводим перпендикулярно к звену DE линию действия скорости $\bar{v}_{ED}$, а через точку e_0, совпадающую с полюсом плана p параллельно оси направляющих ползуна $x — x$ — линию действия скорости $\bar{v}_{EE_0}$. Точка e пересечения этих линий действия определяет конец вектора скорости $\bar{v}_E$ точки E. Величина скорости

$$v_E = pe\mu_v = 23 \cdot 0{,}0057 = 0{,}131 \text{ м/с}.$$

Вектор $\overline{de}$ определяет величину и направление скорости

$$v_{ED} = de\mu_v = 4{,}5 \cdot 0{,}0057 = 0{,}0257 \text{ м/с}.$$

Исходя из теоремы подобия (третье свойство планов скоростей) находим на плане точки s_1, s_2, s_3, s_4, соответствующие центрам тяжести звеньев S_1, S_2, S_3 и S_4, и соединяем их с полюсом p. Определяем величины скоростей центров тяжести:

$$v_{S_1} = ps_1\mu_v = 31 \cdot 0{,}0057 = 0{,}176 \text{ м/с};$$

$$v_{S_2} = ps_2\mu_v = 55 \cdot 0{,}0057 = 0{,}314 \text{ м/с};$$

$$v_{S_3} = ps_3\mu_v = 26 \cdot 0{,}0057 = 0{,}148 \text{ м/с};$$

$$v_{S_4} = ps_4\mu_v = 22{,}5 \cdot 0{,}0057 = 0{,}128 \text{ м/с}.$$

Переходим к определению угловых скоростей звеньев. Угловая скорость $\overline{\omega}_1$ ведущего звена известна по величине и направлению ($\omega_1 = 12{,}56$ 1/с и это звено вращается по часовой стрелке).

Чтобы определить угловую скорость $\overline{\omega}_2$ звена AB, рассмотрим вращение точки B вокруг точки A. Направление скорости $\overline{v}_{BA}$ точки B во вращении вокруг точки A определяется направлением вектора $\overline{ab}$. Мысленно переносим этот вектор в точку B механизма и считаем точку A как бы неподвижной. Точка B в направлении вектора $\overline{ab}$ вращается относительно точки A против часовой стрелки, что и определяет направление вращения звена AB. Находим величину угловой скорости второго звена по формуле

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0{,}188}{0{,}05} = 3{,}76 \text{ 1/с}.$$

При определении направления угловой скорости $\overline{\omega}_3$ поступаем аналогично. Перенесенный в точку B звена O_2B вектор $\overline{o_2b}$ показывает, что точка B вращается относительно точки O_2 по часовой стрелке. Это определяет направление угловой скорости третьего звена

$$\omega_3 = \frac{v_{BO_2}}{l_{O_2B}} = \frac{0{,}24}{0{,}045} = 5{,}32 \text{ 1/с}.$$

Чтобы определить угловую скорость $\overline{\omega}_4$ звена DE, мысленно переносим вектор $\overline{de}$ скорости $\overline{v}_{ED}$ в точку E. В направлении вектора $\overline{de}$ точка E вращается относительно точки D, которую считаем как бы неподвижной, против часовой стрелки, что и определяет направление вращения звена DE. Величина этой угловой скорости

$$\omega_4 = \frac{v_{ED}}{l_{DE}} = \frac{0{,}0257}{0{,}06} = 0{,}428 \text{ 1/с}.$$

Угловая скорость ползуна *5*, совершающего прямолинейное поступательное движение, равна нулю.

Сравним для заданного положения механизма величины скорости $\overline{v}_B$ точки B и угловой скорости $\overline{\omega}_3$ звена O_2B, полученные с помощью плана скоростей и графиков (примеры 3 и 4).

По плану скоростей

$v_B = 0{,}24$ м/с,

$\omega_3 = 5{,}32$ 1/с.

По графику скоростей точки B (рис. 6, *2*)

$v'_B = 0{,}245$ м/с.

По графику угловых скоростей звена O_2B (рис. 7, *2*)

$\omega'_{3_a} = 5{,}35$ 1/с.

Таблица 2

Обозначение	Значение скорости, м/с	Обозначение	Значение скорости, м/с (ω в 1/с)
v_A	0,377	v_{S_2}	0,314
v_B	0,24	v_{S_3}	0,148
v_{BA}	0,188	v_{S_4}	0,128
v_C	0,274	ω_1	12,56
v_D	0,128	ω_2	3,76
v_E	0,131	ω_3	5,32
v_{ED}	0,0257	ω_4	0,428
v_{S_1}	0,176	ω_5	0

Приняв за основу данные, полученные по плану скоростей, вычисляем относительные погрешности:

$$\Delta v = \frac{v_B - v'_B}{v_B} \cdot 100\% = \frac{0{,}24 - 0{,}245}{0{,}24} \cdot 100\% = -2{,}08\%;$$

$$\Delta\omega_3 = \frac{\omega_3 - \omega'_{3_a}}{\omega_3} \cdot 100\% = \frac{5{,}32 - 5{,}35}{5{,}32} \cdot 100\% = -0{,}56\%.$$

Полученные значения абсолютных и относительных скоростей точек и значения угловых скоростей звеньев сводим в табл. 2.

§ 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ ПЛАНОВ УСКОРЕНИЙ

По аналогии с планами скоростей при помощи планов ускорений можно найти ускорения любых точек механизма. При построении планов ускорений также следует пользоваться их изображающими свойствами, заключающимися в следующем:

1. Векторы, исходящие из полюса, изображают собой абсолютные ускорения соответствующих точек в масштабе плана ускорений. Точки плана ускорений, соответствующие точкам, ускорения которых равны нулю, располагаются в полюсе.

2. Векторы, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений, выражают в том же масштабе полные относительные ускорения.

3. Полные относительные ускорения на плане ускорений образуют фигуру, подобную одноименной жесткой фигуре на плане положения механизма, но повернутую по отношению к последней на некоторый угол $180° - \alpha$ в сторону мгновенного углового ускорения данного звена, где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Поскольку полные относительные ускорения состоят из геометрической суммы тангенциальных и нормальных составляющих, то обычно концы векторов абсолютных ускорений на планах ускорений обозначают буквами, соответствующими названию точек. Концы векторов нормальных составляющих ускорения обозначают другими бу-вами, не встречающимися в обозначениях точек механизма.

Пример 6. Методом планов ускорений определить абсолютные и относительные ускорения точек звеньев и угловые ускорения звеньев механизма (рис. 8, *а*). Данные взять по условию примера 5.

Р е ш е н и е. Определим ускорение точки A. Поскольку звено O_1A вращается равномерно, то точка A имеет только нормальное ускорение, которое направлено по звену O_1A к центру вращения. Величина этого ускорения

$$a_A = \omega_1^2 l_{O_1A} = 12{,}56^2 \cdot 0{,}03 = 4{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Принимаем длину отрезка $p'a'$, изображающего вектор ускорения $\bar{a}_A$ точки A, равной 65 мм. Тогда масштаб плана ускорений

$$\mu_a = \frac{a_A}{p'a'} = \frac{4{,}75}{65} = 0{,}073 \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}.$$

Из произвольной точки p', принятой за полюс плана ускорений, откладываем параллельно звену O_1A в направлении от точки A к точке O_1 отрезок $p'a'$ (рис. 8, *в*).

Ускорения точек O_1 и O_2 механизма равны нулю, следовательно, точки O_1' и O_2' будут совпадать с полюсом плана ускорений.

Рассматриваем движение точки B со звеньями AB и BO_2 и по аналогии с планом скоростей составляем векторные уравнения:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}; \quad (5)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{BO_2}. \quad (6)$$

Полные относительные ускорения $\bar{a}_{BA}$ и $\bar{a}_{BO_2}$ представляем в виде суммы двух составляющих — нормальной, направленной по оси соответствующего звена к центру вращения в относительном движении, и тангенциальной, перпендикулярной к этому звену. Тогда уравнения (5) и (6) можно записать в следующем виде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA};$$
$$\bar{a}_B = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}^n_{BO_2} + \bar{a}^t_{BO_2}.$$

В этих уравнениях ускорение $\bar{a}_A$ известно по величине и по направлению, ускорение $\bar{a}_{O_2} = 0$.

Определяем величины нормальных ускорений:

$$a^n_{BA} = \frac{v^2_{BA}}{l_{AB}} = \frac{0{,}188^2}{0{,}05} = 0{,}708 \text{ м/с}^2;$$

$$a^n_{BO_2} = \frac{v^2_{BO_2}}{l_{O_2B}} = \frac{0{,}24^2}{0{,}045} = 1{,}28 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $\bar{a}^n_{BA}$ направлено по оси звена AB от точки B к точке A, ускорение $\bar{a}^n_{BO_2}$ — по оси звена O_2B от точки B к точке O_2.

Относительные тангенциальные ускорения известны только по линиям их действия. Ускорение $\bar{a}^t_{BA}$ перпендикулярно к звену AB, а ускорение $\bar{a}^t_{BO_2}$ перпендикулярно к звену O_2B. Величины и направления тангенциальных ускорений определяем путем построения плана ускорений.

От точки a' плана ускорений параллельно звену AB в направлении от точки B к точке A откладываем вектор $\bar{a}'n_1$, изображающий ускорение $\bar{a}^n_{BA}$. Величина этого вектора

$$a'n_1 = \frac{a^n_{BA}}{\mu_a} = \frac{0{,}708}{0{,}073} = 9{,}7 \text{ мм}.$$

Через точку n_1 проводим перпендикулярно к звену AB линию действия тангенциального ускорения $\bar{a}^t_{BA}$. Затем от точки O_2' плана ускорений, совпадающей с полюсом p', параллельно звену O_2B в направлении от точки B к точке O_2 откладываем вектор $\overline{o_2'n_2}$, изображающий ускорение $\bar{a}^n_{BO_2}$. Определим длину этого отрезка:

$$o_2'n_2 = \frac{a^n_{BO_2}}{\mu_a} = \frac{1{,}28}{0{,}073} = 17{,}5 \text{ мм}.$$

Через точку n_2 проводим перпендикулярно к звену O_2B линию действия тангенциального ускорения $\bar{a}^t_{BO_2}$. На пересечении линий действия ускорений $\bar{a}^t_{BA}$ и $\bar{a}^t_{BO_2}$ получим точку b' — конец вектора $\overline{p'b'}$, изображающего ускорение $\bar{a}_B$ точки B механизма:

$$a_B = p'b'\mu_a = 68 \cdot 0{,}073 = 4{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Точка b' определяет также векторы $\overline{n_1b'}$ и $\overline{n_2b'}$ тангенциальных ускорений $\bar{a}^t_{BA}$ и $\bar{a}^t_{BO_2}$:

$$a^t_{BA} = n_1b'\mu_a = 56{,}5 \cdot 0{,}073 = 4{,}12 \text{ м/с}^2;$$

$$a^t_{BO_2} = n_2b'\mu_a = 66 \cdot 0{,}073 = 4{,}81 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{a'b'}$ изображает полное относительное ускорение $\bar{a}_{BA}$ точки B во вращении вокруг точки A:

$$a_{BA} = a'b'\mu_a = 57{,}5 \cdot 0{,}073 = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{o_2'b'}$ полного ускорения $\bar{a}_{BO_2}$ точки B во вращении относительно точки O_2 механизма совпадает с вектором $\overline{p'b'}$ абсолютного ускорения точки B. Следовательно,

$$a_{BO_2} = a_B = 4{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Исходя из третьего свойства планов ускорений $\triangle\ a'b'c'$ относительных ускорений должен быть подобен $\triangle\ ABC$ звена 2, т. е. можно составить пропорции

$$\frac{a'c'}{a'b'} = \frac{AC}{AB} \text{ и } \frac{b'c'}{a'b'} = \frac{BC}{AB}.$$

Поскольку $AC = BC$, то

$$a'c' = b'c' = \frac{a'b'AC}{AB} = \frac{57{,}5 \cdot 18}{33{,}3} = 31 \text{ мм}.$$

Из точек a' и b' плана ускорений радиусами, равными соответственно длинам отрезков $a'c'$ и $b'c'$, делаем засечки. Из полученных точек пересечения засекающих дуг (слева и справа от вектора $\overline{a'b'}$) в качестве точки c' выбираем точку, расположенную слева, так как при этом порядок букв при обходе треугольника $a'b'c'$ плана ускорений и треугольника ABC механизма будет одинаковым. Соединив полюс

плана ускорений с точкой c', получаем вектор абсолютного ускорения точки C механизма:

$$a_C = p'c'\mu_a = 72 \cdot 0{,}073 = 5{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Находим положение точки d' на плане ускорений исходя из пропорции

$$\frac{o_2' d'}{O_2 D} = \frac{o_2' b'}{O_2 B},$$

откуда $$o_2' d' = \frac{O_2 D o_2' b'}{O_2 B} = \frac{16 \cdot 68}{30} = 36{,}4 \text{ мм}.$$

Следовательно, абсолютное ускорение точки D

$$a_D = p'd'\mu_a = 36{,}4 \cdot 0{,}073 = 2{,}66 \text{ м/с}^2.$$

Для определения ускорения точки E воспользуемся векторными уравнениями:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{ED};$$
$$\bar{a}_E = \bar{a}_{E_0} + \bar{a}_{EE_0},$$

где $\bar{a}_D$ — абсолютное ускорение точки D; $\bar{a}_{ED}$ — полное относительное ускорение точки E во вращении вокруг точки D; $\bar{a}_{E_0}$ — ускорение точки E_0, принадлежащей стойке и совпадающей в данный момент с точкой E ползуна; $\bar{a}_{EE_0}$ — ускорение точки E в поступательном движении относительно точки E_0.

В этих уравнениях:

а) ускорение $\bar{a}_D$ известно по величине и по направлению;

б) полное относительное ускорение $\bar{a}_{ED}$ представляем состоящим из нормальной $\bar{a}^n_{ED}$ и тангенциальной $\bar{a}^t_{ED}$ составляющих. Нормальное ускорение

$$a^n_{ED} = \frac{v^2_{ED}}{l_{DE}} = \frac{0{,}0257^2}{0{,}06} = 0{,}011 \text{ м/с}^2$$

направлено по оси звена DE от точки E к точке D.

Для тангенциального ускорения $\bar{a}^t_{ED}$ известна только линия его действия, перпендикулярная к звену DE;

в) ускорение $\bar{a}_{E_0} = 0$;

г) ускорение $\bar{a}_{EE_0}$ известно по линии действия; оно направлено параллельно оси направляющих ползуна.

От точки d' плана ускорений параллельно звену DE в направлении от точки E к точке D откладываем вектор $\overline{d'n_3}$, изображающий нормальное ускорение $\overline{a}^n_{ED}$, предварительно определив длину этого отрезка:

$$d'n_3 = \frac{a^n_{ED}}{\mu_a} = \frac{0{,}011}{0{,}073} = 0{,}15 \text{ мм.}$$

Поскольку его длина $\overline{d'n_3}$ в выбранном масштабе плана ускорений не превышает 1 мм, то точки n_3 и d' на плане совпадают.

Из точки n_3 перпендикулярно к звену DE проводим линию действия тангенциального ускорения $\overline{a}^t_{ED}$. Поскольку ускорение $\overline{a}_{E_0}$ равно нулю, то точка e'_0 на плане ускорений совпадает с полюсом p'. Через точку e'_0 параллельно оси направляющих ползуна $x — x$ проводим линию действия ускорения $\overline{a}_{EE_0}$. Точка e' пересечения этих линий действия определяет конец вектора, изображающего абсолютное ускорение точки E:

$$a_E = p'e'\mu_a = 36 \cdot 0{,}073 = 2{,}63 \text{ м/с}^2.$$

Точка e' определяет также векторы $\overline{n_3e'} = \overline{d'e'}$, изображающие тангенциальное $\overline{a}^t_{ED}$ и полное относительное $\overline{a}_{ED}$ ускорения:

$$a_{ED} = a^t_{ED} = d'e'\mu_a = 3 \cdot 0{,}073 = 0{,}219 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{e'_0e'}$ ускорения $\overline{a}_{EE_0}$ совпадает с вектором $\overline{p'e'}$ абсолютного ускорения точки E. Следовательно,

$$a_{EE_0} = a_E = 2{,}63 \text{ м/с}^2.$$

Зная положения центров тяжести S_1, S_2, S_3, S_4 на звеньях по аналогии с планом скоростей находим по правилу подобия соответствующие им точки s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 на плане ускорений. Соединяем полученные точки с полюсом плана ускорений и определяем ускорения центров тяжести:

$$a_{S_1} = p's'_1\mu_a = 30{,}5 \cdot 0{,}073 = 2{,}23 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S_2} = p's'_2\mu_a = 60 \cdot 0{,}073 = 4{,}38 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S_3} = p's'_3\mu_a = 42 \cdot 0{,}073 = 3{,}07 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S_4} = p's'_4\mu_a = 36 \cdot 0{,}073 = 2{,}63 \text{ м/с}^2.$$

Звено 5 совершает поступательное движение, поэтому ускорение его центра тяжести $\bar{a}_{S_5}$ совпадает по величине и направлению с ускорением $\bar{a}_E$ точки E.

Определяем угловые ускорения звеньев. Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}_1$ ведущего звена O_1A, совершающего равномерное движение, равно нулю.

Угловое ускорение звена 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a^t_{BA}}{l_{AB}} = \frac{4,12}{0,05} = 80,4 \ 1/\text{с}^2.$$

Для определения направления углового ускорения $\bar{\varepsilon}_2$ звена 2 рассмотрим вращение точки B вокруг точки A. Перенесем мысленно вектор $\overline{n_1b'}$ тангенциального ускорения $\bar{a}^t_{BA}$ в точку B. В направлении этого вектора точка B вращается относительно точки A против часовой стрелки, что и определяет направление углового ускорения $\bar{\varepsilon}_2$.

Таблица 3

Обозначение	Значение ускорения, м/с²	Обозначение	Значение ускорения, м/с² (ε в 1/с²)
a_A	4,75	a_E	2,63
a^n_{BA}	0,708	a_{S_1}	2,23
a^t_{BA}	4,12	a_{S_2}	4,38
a_{BA}	4,2		
$a_B = a_{BO_2}$	4,96	a_{S_3}	3,07
$a^n_{BO_2}$	1,28	a_{S_4}	2,63
$a^t_{BO_2}$	4,81	$a_{S_5} = a_E$	2,63
a_C	5,25	ε_1	0
a_D	2,66	ε_2	80,4
a^n_{ED}	0,011	ε_3	107
a^t_{ED}	0,219	ε_4	3,65
a_{ED}	0,219	ε_5	0

Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}_3$ звена O_2B направлено против часовой стрелки (по вращению точки B относительно точки O_2 в направлении вектора $\overline{n_2b'}$). Величина его определяется по формуле

$$\varepsilon_3 = \frac{a^t_{BO_2}}{l_{O_2B}} = \frac{4,81}{0,045} = 107 \ 1/\text{с}^2.$$

Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}_4$ звена DE направлено в соответствии с круговой стрелкой, направленной против часовой стрелки (по вращению точки E относительно точки D в направлении вектора $\overline{n_3e'}$ тангенциального ускорения $\bar{a}^t_{ED}$), и определяется по формуле

$$\varepsilon_4 = \frac{a^t_{ED}}{l_{DE}} = \frac{0,219}{0,06} = 3,65 \ 1/\text{с}^2.$$

Угловое ускорение звена 5, движущегося поступательно, равно нулю.

Полученные значения ускорений сводим в таблицу 3.

Глава III. СИЛОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 10. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

При силовом исследовании решаются следующие задачи: 1) определение усилий, действующих на звенья; 2) определение давлений в кинематических парах; 3) определение уравновешивающей силы (момента).

Проектирование нового механизма всегда включает силовой расчет, так как по найденным силам производится последующий расчет на прочность элементов кинематических пар и звеньев механизма.

Одним из наиболее распространенных методов силового расчета является метод кинетостатики. Этот метод основан на принципе Д'Аламбера, который применительно к механизмам можно сформулировать так: если ко всем внешним силам, действующим на систему звеньев, добавить силы инерции, то под действием всех этих сил система звеньев может считаться как бы находящейся в равновесии. В этих условиях можно применять уравнения статики для решения задач динамики. Поскольку статически определимыми системами являются группы Ассура, то кинетостатический расчет ведется путем последовательного рассмотрения условий равновесия отдельно каждой группы, начиная с наиболее удаленной от ведущего звена.

§ 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Общий случай. Звено AB совершает плоскопараллельное движение (рис. 9). Все точки звена совершают движения с различными по величине и направлению ускорениями. Соответственно этому к каждой материальной точке звена может быть приложена ей присущая элементарная сила инерции:

$$d\overline{P}_{иi} = dm_i \overline{a}_{Si}.$$

Как известно из теоретической механики, все эти элементарные силы инерции могут быть сведены к главному век-

тору сил инерции $\bar{P}_и$, приложенному в центре тяжести S звена и к главному моменту сил инерции $\bar{M}_и$, которые соответственно выражаются формулами:

$$\bar{P}_и = -m\bar{a}_S;$$
$$\bar{M}_и = -J_S\bar{\varepsilon},$$

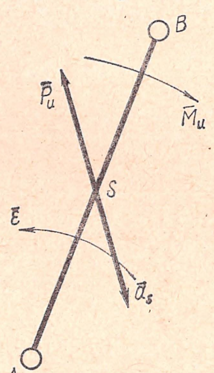


Рис. 9. К определению сил инерции звена, совершающего плоскопараллельное движение.

где m — масса звена, кг; $\bar{a}_S$ — ускорение центра тяжести, м/с²; J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести, кг·м²; $\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение звена, 1/с².

Знаки минус в формулах указывают на то, что главный вектор и главный момент сил инерции направлены в стороны, противоположные направлениям соответствующих ускорений.

Частные случаи. 1. Звено совершает вращательное движение вокруг оси, не проходящей через центр тяжести (рис. 10). Здесь аналогично все элементарные силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции (Н)

$$\bar{P}_и = -m\bar{a}_S$$

и к главному моменту сил инерции (Н · м)

$$\bar{M}_и = -J_S\bar{\varepsilon}.$$

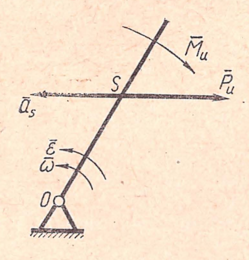


Рис. 10. К определению сил инерции звена, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр тяжести.

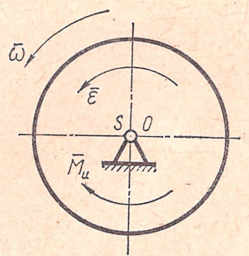


Рис 11. К определению сил инерции звена, совершающего вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести.

2. Звено вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести его (рис. 11), например ротор электродвигателя. В этом случае $\bar{a}_S = 0$, следовательно, главный вектор сил инерции $\bar{P}_и = 0$.

Если угловое ускорение $\bar{\varepsilon} \neq 0$, то к звену прикладывается только главный момент сил инерции

$$\bar{M}_и = -J_S \bar{\varepsilon}.$$

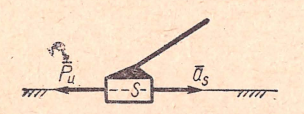


Рис. 12. К определению сил инерции звена, совершающего поступательное движение в неподвижных направляющих.

3. Звено совершает поступательное движение (рис. 12) с ускорением $\bar{a}_S$. Считая, что масса звена сосредоточена в центре тяжести S, главный вектор сил инерции выразится так:

$$\bar{P}_и = -m\bar{a}_S.$$

Рис. 13. План механизма с действующими силами (*а*) и план ускорений (*б*).

Поскольку угловое ускорение $\bar{\varepsilon} = 0$, то главный момент сил инерции $\bar{M}_и = 0$.

Пример. Произвести кинетостатическое исследование механизма (рис. 13, *а*) в положении, определяемом углом

φ поворота ведущего звена O_1A, если на коромысло (звено 3) действует момент сил полезного сопротивления $\overline{M}_{п. с} = 6$ Н·м; к ползуну (звено 5) приложена сила полезного сопротивления $\overline{P}_{п. с} = 140$ Н; веса звеньев — $\overline{G}_1 = 44$ Н, $\overline{G}_2 = 38$ Н, $\overline{G}_3 = 28$ Н, $\overline{G}_4 = 40$ Н, $\overline{G}_5 = 60$ Н; моменты инерции звеньев — $J_{S_2} = 0{,}00094$ кг·м^2, $J_{S_3} = 0{,}00084$ кг·м^2, $J_{S_4} = 0{,}00575$ кг·м^2; уравновешивающая сила $\overline{P}_у$ приложена в точке A звена O_1A перпендикулярно к оси звена. Размеры звеньев берем по условию примера 5, § 8, $\varphi = 55°$, частота вращения кривошипа $n_1 = 120$ об/мин в направлении часовой стрелки.

Решение. Чтобы определить величины и направления сил инерции, воспользуемся планом ускорений из примера 6, § 9 (рис. 13, *б*).

Звено O_1A вращается с постоянной угловой скоростью, при этом возникает только сила инерции

$$|\overline{P}_{и1}| = \frac{G_1}{g}|\overline{a}_{S_1}| = \frac{44}{9{,}81}\cdot 2{,}23 = 10 \text{ Н},$$

направленная вдоль звена O_1A от точки S_1 к точке A.

Звено AB (шатун) совершает плоскопараллельное движение, при этом возникают сила инерции

$$|\overline{P}_{и2}| = \frac{G_2}{g}|\overline{a}_{S_2}| = \frac{38}{9{,}81}\cdot 4{,}38 = 17 \text{ Н},$$

направленная противоположно ускорению $\overline{a}_{S_2}$ центра тяжести и приложенная в точке S_2, и пара сил инерции с моментом

$$|\overline{M}_{и2}| = J_{S_2}|\overline{\varepsilon}_2| = 0{,}00094\cdot 80{,}4 = 0{,}0756 \text{ Н·м},$$

направленным противоположно угловому ускорению ε_2 звена AB.

Для удобства силового расчета механизма момент пары сил инерции $\overline{M}_{и_2}$ представляем эквивалентной парой сил, направление вращения которой совпадает с направлением момента. Плечо пары сил принимаем равным длине звена AB. В точке A перпендикулярно к оси звена AB прикладываем силу $\overline{P}'_{и_2}$ вверх, в точке B перпендикулярно к оси звена AB прикладываем силу $\overline{P}''_{и_2}$ вниз. Сила

$$|\overline{P}'_{и2}| = |\overline{P}''_{и2}| = \frac{|\overline{M}_{и2}|}{l_{AB}} = \frac{0{,}0756}{0{,}05} = 1{,}51 \text{ Н}.$$

Полученная пара сил заменяет действие момента пар сил инерции $\overline{M}_{и2}$. Поэтому в дальнейшем расчете его учитывать не будем (на рис. 13, *а* момент $\overline{M}_{и2}$ зачеркнут), а будем учитывать пару сил $\overline{P}'_{и2}$ и $\overline{P}''_{и2}$ на плече AB.

Звено O_2B (коромысло) совершает качательное движение, в этом случае также имеет место сила инерции $\overline{P}_{и3}$ и пара сил инерции с моментом $\overline{M}_{и3}$. Определяем силу инерции

$$|\overline{P}_{и3}| = \frac{G_3}{g}|\overline{a}_{S_3}| = \frac{28}{9,81}\cdot 3,07 = 8,75 \text{ Н}.$$

Силу $P_{и3}$ прикладываем к точке S_3 в сторону, противоположную ускорению центра тяжести $\overline{a}_{S_3}$.

Момент пары сил инерции

$$|\overline{M}_{и3}| = J_{S_3}|\overline{\varepsilon}_3| = 0,00084\cdot 107 = 0,09 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Заменяем $\overline{M}_{и3}$ эквивалентной парой сил на плече O_2B (рис. 13, *а*).

Определяем величины сил пары:

$$|\overline{P}'_{и3}| = |\overline{P}''_{и3}| = \frac{|\overline{M}_{и3}|}{l_{O_2B}} = \frac{0,09}{0,045} = 2 \text{ Н}.$$

Звено DE (шатун) совершает плоскопараллельное движение. Определяем возникающие при его движении силу инерции и момент пары сил инерции:

$$|\overline{P}_{и4}| = \frac{G_4}{g}|\overline{a}_{S_4}| = \frac{40}{9,81}\cdot 2,63 = 10,7 \text{ Н}.$$

$$|\overline{M}_{и4}| = J_{S_4}|\overline{\varepsilon}_4| = 0,00575\cdot 3,65 = 0,021 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Силу инерции $\overline{P}_{и4}$ прикладываем в точке S_4 в сторону, противоположную ускорению $\overline{a}_{S_4}$, момент пары сил инерции заменяем эквивалентной парой сил:

$$|\overline{P}'_{и4}| = |\overline{P}''_{и4}| = \frac{|\overline{M}_{и4}|}{l_{DE}} = \frac{0,021}{0,06} = 0,35 \text{ Н}.$$

Силу $\overline{P}'_{и4}$ прикладываем к точке E вниз перпендикулярно к оси звена DE, силу $\overline{P}'_{и4}$ — в точке D вверх (рис. 13, *а*).

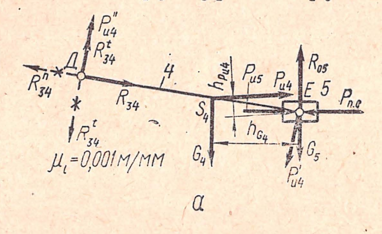
Звено 5 (ползун) совершает поступательное движение вдоль неподвижной направляющей. В этом случае возникает только сила инерции

$$|\bar{P}_{и5}| = \frac{G_5}{g}|\bar{a}_{S_5}| = \frac{60}{9,81}\cdot 2,63 = 16,1\ \text{Н},$$

направленная противоположно ускорению $\bar{a}_{S_5}$ центра тяжести звена 5.

§ 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ И УРАВНОВЕШИВАЮЩЕЙ СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННОЙ В ТОЧКЕ *А* КРИВОШИПА (СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМА)

Механизм состоит из исходного механизма I класса I порядка и двух двухповодковых структурных групп II класса 4—5 и 2—3 (см. рис. 4). Силовой расчет механизма начинаем с наиболее удаленной от ведущего звена группы 4—5, состоящей из звеньев 4 и 5, двух вращательных пар *D* и *E* и одной крайней поступательной пары *F*.



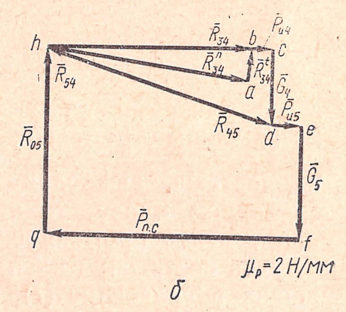


Рис. 14. Группа звеньев 4 — 5 с действующими силами (*а*) и план сил группы 4 — 5 (*б*).

На группу 4—5 действуют известные по величине и направлению силы $\bar{G}_4$, $\bar{G}_5$, $\bar{P}'_{и4}$, $\bar{P}''_{и4}$, $\bar{P}_{и5}$, $\bar{P}_{и4}$ и $\bar{P}_{п.\,с}$. Освобождаем группу 4—5 от связей (рис. 14, *а*) и прикладываем вместо них две реакции: одну реакцию $\bar{R}_{05}$ — в поступательной паре *F*, перпендикулярную[1] к направляющей ползуна и неизвестную по величине; другую $\bar{R}_{34}$ — в шарнире *D*, неизвестную по величине и направле-

[1] Направление R_{05} принимается перпендикулярным к направляющей в условиях, когда силы трения не учитываются.

нию. Реакцию $\overline{R}_{34}$ представляем в виде двух составляющих: тангенциальной $\overline{R}_{34}^t$, направленной перпендикулярно к оси звена DE, и нормальной $\overline{R}_{34}^n$, направленной вдоль звена DE. Направлением составляющих задаемся произвольно, как показано пунктирными векторами на рис. 14, *а*. Чтобы определить реакции в кинематических парах D и F, составляем векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу *4—5*, причем сначала в уравнение записываем все силы, действующие на звено *4*, затем — на звено *5*:

$$\overline{R}_{34}^n + \overline{R}_{34}^t + \overline{P}_{и4} + \overline{G}_4 + \overline{P}_{и5} + \overline{G}_5 + \overline{P}_{п.\,с} + \overline{R}_{05} = 0. \quad (7)$$

Поскольку это уравнение решается путем построения плана сил, то силы $\overline{P}'_{и4}$ и $\overline{P}''_{и4}$ в уравнение не записываем как взаимно друг друга уравновешивающие (равные по величине, но противоположно направленные).

Реакцию R_{34}^t, входящую в уравнение, можно определить аналитически, для этого составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено DE, относительно точки E:

$$R_{34}^t DE - P''_{и4} DE + G_4 h_{G_4} - P_{и4} h_{P_{и4}} = 0,$$

откуда

$$R_{34}^t = \frac{P''_{и4} DE + P_{и4} h_{P_{и4}} - G_4 h_{G_4}}{DE} =$$

$$= \frac{0{,}35 \cdot 60 + 10{,}7 \cdot 7 - 40 \cdot 28}{60} = -17{,}1 \text{ Н}.$$

Здесь длины отрезков $h_{P_{и4}}$, h_{G_4} и DE взяты в миллиметрах из чертежа. Поскольку составляющая R_{34}^t получилась со знаком минус, то это значит, что ее действительное направление противоположно выбранному.

Для построения плана сил исходя из величин сил, входящих в уравнение (7), задаемся масштабом плана $\mu_P = 2$ Н/мм и вычисляем длины векторов, изображающих известные силы:

$$ab = \frac{R_{34}^t}{\mu_P} = \frac{17{,}1}{2} = 8{,}6 \text{ мм};$$

$$bc = \frac{P_{и4}}{\mu_P} = \frac{10{,}7}{2} = 5{,}4 \text{ мм};$$

$$cd = \frac{G_4}{\mu_P} = \frac{40}{2} = 20 \text{ мм};$$

$$de = \frac{P_{и5}}{\mu_P} = \frac{16,1}{2} = 8,05 \text{ мм};$$

$$ef = \frac{G_5}{\mu_P} = \frac{60}{2} = 30 \text{ мм};$$

$$fq = \frac{P_{п.\,с}}{\mu_P} = \frac{140}{2} = 70 \text{ мм}.$$

От произвольной точки a — полюса плана сил (рис. 14, б) параллельно силе $\overline{R}_{34}^t$ откладываем в том же направлении вектор $\overline{ab}$, изображающий эту силу. Из конца вектора $\overline{ab}$ точки b параллельно силе $\overline{P}_{и4}$ откладываем в том же направлении вектор $\overline{bc}$. Далее откладываем последовательно векторы: $\overline{cd}$ силы $\overline{G}_4$, $\overline{de}$ силы $\overline{P}_{и5}$, $\overline{ef}$ силы $\overline{G}_5$, $\overline{fq}$ силы $\overline{P}_{п.\,с}$. Через точку a плана сил параллельно звену DE проводим линию действия силы $\overline{R}_{34}^n$, а через точку q перпендикулярно к направляющей ползуна — линию действия силы $\overline{R}_{05}$. Точка h пересечения этих линий действия определит векторы $\overline{qh}$ силы $\overline{R}_{05}$ и $\overline{ha}$ силы $\overline{R}_{34}^n$:

$$|\overline{R}_{05}| = |\overline{qh}|\,\mu_P = 50 \cdot 2 = 100 \text{ Н};$$

$$|\overline{R}_{34}^n| = |ha|\,\mu_P = 56 \cdot 2 = 112 \text{ Н}.$$

Вектор $\overline{hb}$, являясь геометрической суммой векторов $\overline{ha}$ и $\overline{ab}$, представляет в масштабе μ_P полную реакцию $\overline{R}_{34}$:

$$|\overline{R}_{34}| = |\overline{hb}|\,\mu_P = 57,5 \cdot 2 = 115 \text{ Н}.$$

Чтобы определить реакции в кинематической паре E, составляем уравнение равновесия сил, действующих на звено *4*:

$$\overline{R}_{34} + \overline{P}_{и4} + \overline{G}_4 + \overline{R}_{54} = 0,$$

где $\overline{R}_{54}$ — реакция со стороны звена *5* на звено *4*.

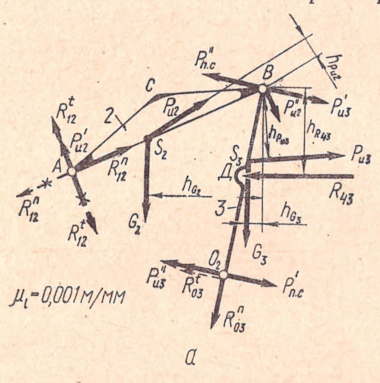
Векторы сил $\overline{R}_{34}$ $(\overline{hb})$, $\overline{P}_{и4}\,(\overline{bc})$, $\overline{G}_4\,(\overline{cd})$ на плане сил (рис. 14, *б*) уже имеются, поэтому неизвестная реакция $\overline{R}_{54}$ будет представлена замыкающим вектором $\overline{dh}$ на этом плане:

$$|\overline{R}_{54}| = |\overline{dh}|\,\mu_P = 65 \cdot 2 = 130 \text{ Н}.$$

Реакция $\overline{R}_{45}$ со стороны звена 4 на звено 5 равна по величине реакции $\overline{R}_{54}$ и противоположна ей по направлению:

$$\overline{R}_{45} = -\overline{R}_{54}.$$

Переходим к расчету группы 2—3, состоящей из звеньев 2 и 3 и из трех вращательных пар A, B и O_2. На группу 2—3 действуют известные по величине и направлению силы $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{P}_{и2}$, $\overline{P}'_{и2} = -\overline{P}''_{и2}$, $\overline{P}'_{и3} = -\overline{P}''_{и3}$, $\overline{P}_{и3}$, $\overline{R}_{43}$ — реакция со стороны звена 4 на звено 3, связанная с реакцией $\overline{R}_{34}$ зависимостью $\overline{R}_{43} = -\overline{R}_{34}$, и момент сил полезного сопротивления $\overline{M}_{п. с}$. Для удобства ведения дальнейших расчетов представим момент $\overline{M}_{п. с}$ в виде эквивалентной пары сил: $\overline{P}'_{п. с}$, приложенной в точке O_2 механизма перпендикулярно к звену O_2B, и $\overline{P}''_{п. с}$, приложенной в точке B таким образом, чтобы направление вращения этой пары совпадало с направлением $\overline{M}_{п. с}$ (против часовой стрелки) (рис. 15, *а*). Освобождаем группу 2—3 от связей (рис. 15, *а*) и прикладываем вместо них две реакции: $\overline{R}_{12}$ в шарнире A и $\overline{R}_{03}$ в шарнире O_2, неизвестные по величине и направлению. Представляем реакции $\overline{R}_{12}$ и $\overline{R}_{03}$ в виде тангенциальных и нормальных составляющих. Ориентировочные направления тангенциальных составляющих $\overline{R}^t_{12}$ и $\overline{R}^t_{03}$ показаны пунктирными векторами (рис. 15, *а*).



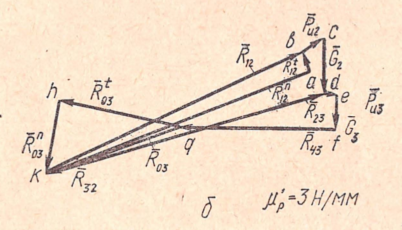


Рис. 15. Группа звеньев 2 — 3 с действующими силами (*а*) и план сил группы 2 — 3 (*б*).

Для определения реакции $\overline{R}^t_{12}$ составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно

точки B:

$$R_{12}^t AB + G_2 h_{G_2} - P'_{и2} AB - P_{и2} h_{P_{и2}} = 0,$$

откуда $$R_{12}^t = \frac{P'_{и2} AB + P_{и2} h_{P_{и2}} - G_2 h_{G_2}}{AB} =$$

$$= \frac{1{,}51 \cdot 50 + 17 \cdot 6 - 38 \cdot 28}{50} = -17{,}4 \text{ Н}.$$

Знак минус показывает, что действительное направление реакции $\overline{R}_{12}^t$ противоположно выбранному. Для определения реакции $\overline{R}_{03}^t$ составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено *3*, относительно точки B:

$$R_{03}^t O_2 B + P''_{и3} O_2 B - P'_{п.\,с} O_2 B + R_{43} h_{R_{43}} - G_3 h_{G_3} - P_{и3} h_{P_{и3}} = 0,$$

где $$|\overline{P}'_{п.\,с}| = |\overline{P}''_{п.\,с}| = \frac{|\overline{M}_{п.\,с}|}{l_{O_2B}} = \frac{6}{0{,}045} = 133{,}3 \text{ Н}.$$

$$R_{03}^t = \frac{-P''_{и3} O_2 B + P'_{п.\,с} O_2 B - R_{43} h_{R_{43}} + G_3 h_{G_3} + P_{и3} h_{P_{и3}}}{O_2 B} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 45 + 133{,}3 \cdot 45 - 115 \cdot 20 + 28 \cdot 2{,}5 + 8{,}75 \cdot 15}{45} = 84{,}5 \text{ Н}.$$

Знак плюс указывает, что направление этой реакции выбрано правильно.

Для определения реакций в кинематических парах A и O_2 строим план сил для двухповодковой группы *2—3* в целом (рис. 15, *б*) согласно векторному уравнению

$$\overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^t + \overline{P}_{и2} + \overline{G}_2 + \overline{P}_{и3} + \overline{G}_3 + \overline{R}_{43} + \overline{R}_{03}^t + \overline{R}_{03}^n = 0.$$

Силы $\overline{P}'_{и2}$ и $\overline{P}''_{и2}$, $\overline{P}'_{и3}$ и $\overline{P}''_{и3}$, $\overline{P}'_{п.\,с}$ и $\overline{P}''_{п.\,с}$ в уравнение не записываем, так как при построении плана сил они взаимно уравновешиваются. Масштаб плана сил $\mu'_P = 3$ Н/мм. Из плана сил определяем величины и направления сил $\overline{R}_{12}^n$ и $\overline{R}_{03}^n$, а также полных реакций $\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}^t + \overline{R}_{12}^n$ и $\overline{R}_{03} = \overline{R}_{03}^t + \overline{R}_{03}^n$:

$$|\overline{R}_{12}^n| = |\overline{ka}|\, \mu'_P = 70 \cdot 3 = 210 \text{ Н};$$

$$|\overline{R}_{03}^n| = |\overline{hk}|\, \mu'_P = 18 \cdot 3 = 54 \text{ Н};$$

$$|\overline{R}_{12}| = |\overline{kb}|\, \mu'_P = 70{,}3 \cdot 3 = 211 \text{ Н};$$

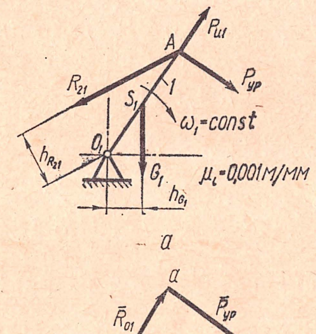
$$|\overline{R}_{03}| = |\overline{qk}|\, \mu'_P = 34 \cdot 3 = 102 \text{ Н}.$$

Чтобы определить реакции в кинематической паре B, составляем уравнение равновесия сил, действующих на звено 2 (отбросив звено 3, а действие его на звено 2 выразив реакцией $\overline{R}_{32}$):

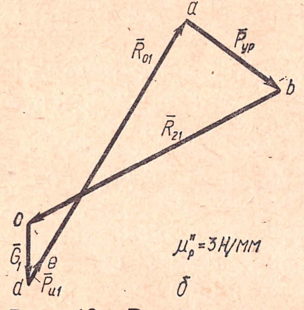
$$\overline{R}_{12} + \overline{P}_{и2} + \overline{G}_2 + \overline{R}_{32} = 0.$$

Согласно плану сил реакцию $\overline{R}_{32}$ определяет по величине и направлению вектор $\overline{dk}$:

$$|\overline{R}_{32}| = |\overline{dk}|\mu_P' = 70 \cdot 3 = 210 \text{ Н}.$$



а



б

Рис. 16. Ведущее звено с действующими силами (*а*) и план сил ведущего звена (*б*).

Реакция $\overline{R}_{23}$ равна по величине реакции $\overline{R}_{32}$ и противоположна ей по направлению:

$$\overline{R}_{23} = -\overline{R}_{32}.$$

Производим расчет ведущего звена. На кривошип O_1A действуют: сила веса $\overline{G}_1$, сила инерции $\overline{P}_{и1}$, со стороны звена 2 реакция $\overline{R}_{21}$ и со стороны стойки реакция $\overline{R}_{01}$. Кроме этих сил в точку A кривошипа перпендикулярно к оси звена приложим уравновешивающую силу $\overline{P}_{ур}$ (рис. 16, *а*). Силы $\overline{G}_1$, $\overline{P}_{и1}$ и $\overline{R}_{21}$ полностью известны (по величине и направлению), а силы $\overline{R}_{01}$ и $\overline{P}_{ур}$ — не известны.

Вначале определяем величину силы $\overline{P}_{ур}$. Для этого составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 1, относительно точки O_1:

$$P_{ур}O_1A - R_{21}h_{R_{21}} + G_1h_{G_1} = 0,$$

откуда

$$P_{ур} = \frac{R_{21}h_{R_{21}} - G_1h_{G_1}}{O_1A} = \frac{211 \cdot 14 - 44 \cdot 9}{30} = 85{,}3 \text{ Н}.$$

Реакцию $\overline{R}_{01} = -\overline{R}_{10}$ по величине и направлению определяем путем построения плана сил (рис. 16, *б*), действующих на звено *1*, согласно векторному уравнению

$$\overline{P}_{ур} + \overline{R}_{21} + \overline{G}_1 + \overline{P}_{и1} + \overline{R}_{01} = 0.$$

Масштаб плана сил принимаем

$$\mu_P'' = 3 \text{ Н/мм}.$$

Из плана

$$|\overline{R}_{01}| = |\overline{ea}|\,\mu_P'' = 71 \cdot 3 = 213 \text{ Н}.$$

Получены искомые величины реакций и уравновешивающей силы в соответствующих кинематических парах, Н:

R_{O_1}	213	R_D	115
R_A	211	R_E	130
R_B	210	R_F	100
R_{O_2}	102	$P_{ур}$	85,3

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНОВЕШИВАЮЩЕЙ СИЛЫ С ПОМОЩЬЮ РЫЧАГА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Уравновешивающую силу, приложенную к ведущему звену механизма, можно также определить на основании теоремы Н. Е. Жуковского о жестком рычаге, суть которой заключается в следующем: «Если какой-либо механизм с одной степенью подвижности под действием сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и т. д., приложенных к точкам *A*, *B*, *C* и т. д., находится в равновесии, то в равновесии находится и повернутый на 90° план скоростей этого механизма, рассматриваемый как жесткий рычаг, вращающийся вокруг полюса *p* и нагруженный теми же силами $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и т. д., приложенными соответственно к точкам *a*, *b*, *c* и т. д.» [2].

Поэтому строим в произвольном масштабе повернутый на 90° план скоростей механизма. Для удобства принимаем масштаб $\mu_v = 0{,}00285$ м/с·мм, при этом длины векторов повернутого плана скоростей увеличатся вдвое по сравнению с векторами построенного ранее плана скоростей, и переносим на этот план заданную силу $\overline{P}_{п.с}$, пару сил $\overline{P}'_{п.с}$ и $\overline{P}''_{п.с}$ от момента $\overline{M}_{п.с}$, силы веса $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$, $\overline{G}_5$, силы инерции $\overline{P}_{и1}$, $\overline{P}_{и2}$, $\overline{P}_{и3}$, $\overline{P}_{и4}$, $\overline{P}_{и5}$ и пары

сил $\overline{P}'_{и2}$ и $\overline{P}''_{и2}$, $\overline{P}'_{и3}$ и $\overline{P}''_{и3}$, $\overline{P}'_{и4}$ и $\overline{P}''_{и4}$ от моментов пар сил инерции $\overline{M}_{и2}$, $\overline{M}_{и3}$ и $\overline{M}_{и4}$.

Перечисленные силы (рис. 17) переносим параллельно самим себе и прикладываем в одноименных точках повернутого на 90° плана скоростей: силы $\overline{P}_{п.\,с}$, $\overline{P}'_{и4}$, $\overline{P}_{и5}$, $\overline{G}_5$ — в точке e плана; силы $\overline{P}'_{п.\,с}$ и $\overline{P}''_{и3}$ — в полюсе p; силы $\overline{P}''_{п.\,с}$, $\overline{P}'_{и3}$ и $\overline{P}''_{и2}$ — в точке b; силу $\overline{P}'_{и2}$ — в точке a; силы $\overline{P}_{и1}$ и $\overline{G}_1$ в точке s_1; силы $\overline{P}_{и2}$ и $\overline{G}_2$ — в точке s_2; силы $\overline{P}_{и3}$ и $\overline{G}_3$ — в точке s_3; силы $\overline{P}_{и4}$ и $\overline{G}_4$ — в точке s_4. В точке a плана перпендикулярно к вектору $\overline{pa}$ прикладываем уравновешивающую силу $\overline{P}_{ур}$.

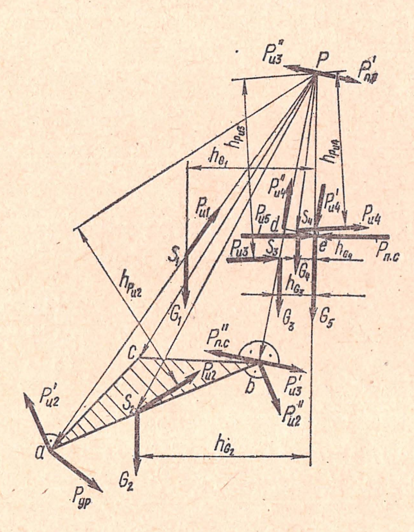


Рис. 17. Рычаг Н. Е. Жуковского.

Составляем уравнение моментов всех перенесенных на план скоростей сил относительно полюса p:

$$-P_{ур}pa + P''_{п.\,с}pb + P_{п.\,с}pe - G_1h_{G_1} - G_2h_{G_2} - G_3h_{G_3} - $$
$$- G_4h_{G_4} - P_{и2}h_{P_{и2}} - P_{и3}h_{P_{и3}} - P_{и4}h_{P_{и4}} - P_{и5}pe +$$
$$+ P'_{и4}de - P'_{и3}pb + P'_{и2}ab = 0,$$

откуда

$$P_{ур} = \frac{P''_{п.\,с}pb + P_{п.\,с}pe - G_1h_{G_1} - G_2h_{G_2} - G_3h_{G_3} - G_4h_{G_4} -}{pa} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{- P_{и2}h_{P_{и2}} - P_{и3}h_{P_{и3}} - P_{и4}h_{P_{и4}} - P_{и5}pe + P'_{и4}de - P'_{и3}pb + P'_{и2}ab}{} =$$

$$= \frac{133{,}3 \cdot 84 + 140 \cdot 46 - 44 \cdot 36 - 38 \quad 51 - 28 \quad 10 -}{132} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{- 40 \cdot 5 - 17 \quad 53 - 8{,}75 \cdot 50 - 10{,}7 \cdot 44 - 16{,}1 \quad 46 -}{} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{- 0{,}35 \cdot 9 - 2 \cdot 84 + 1{,}51 \cdot 66}{} = 83{,}2 \text{ Н}.$$

Сравниваем величины уравновешивающих сил, полученных силовым расчетом механизма ($P_{ур} = 85{,}3$ Н) и с помощью рычага Н. Е. Жуковского (($P_{ур} = 83{,}2$ Н), и вычисляем относительную погрешность, приняв за основу результат, полученный с помощью рычага Н. Е. Жуковского:

$$\Delta P_{ур} = \frac{P_{ур.\,ж} - P_{ур.\,с.\,р}}{P_{ур.\,ж}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{83{,}2 - 85{,}3}{83{,}2} \cdot 100\% = -2{,}52\%.$$

Относительная погрешность в вычислениях уравновешивающей силы не превысила допустимой (5%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М., «Наука», 1975.
2. Баранов Г. Г. Курс теории механизмов и машин. М., «Машиностроение», 1967.
3. Теория механизмов. Под ред. В. А. Гавриленко. М., «Высшая школа», 1973.
4. Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин. М., «Машиностроение», 1973.

Приложение

Условные обозначения звеньев и кинематических пар

Обозначение		Наименование
	1	Подвижное звено, входящее в две вращательные кинематические пары
	2	Сложное подвижное звено, т. е. звено, входящее в три вращательные кинематические пары
	3	Звено, входящее в три вращательные пары с параллельными осями вращения, лежащими в одной плоскости
	4	Два подвижных звена, соединенные вращательной кинематической парой
или	5	Вращательная пара, соединяющая подвижное и неподвижное звено. Неподвижные звенья (стойки) на схемах показывают штриховкой
или	6	Поступательная кинематическая пара двух подвижных звеньев
или или или	7	Поступательная кинематическая пара подвижного звена с неподвижным
	8	Поступательная кинематическая пара двух подвижных звеньев при криволинейной направляющей

ОГЛАВЛЕНИЕ

Михаил Евгеньевич Иванов,
Владимир Сергеевич Павленко

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Решение задач по структуре, кинематике и кинетостатике плоских рычажных механизмов

Научный редактор *К. Н. Негребецкий*
Редактор *Е. Ф. Воробьева*
Художественный редактор *С. В. Анненков*
Технический редактор *М. С. Чабан*
Корректор *С. И. Сокил*
Информ. бланк № 2327

Сдано в набор 27.07.1977 г. Подписано в печать 2.11.1977 г. Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская № 3. 2,52 усл. печ. л., 2,36 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз. (I завод 1—1000). II завод (1001—15 000). Изд. № 3326 БФ 01870. Зак. № 7-353. Цена 5 коп.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа». 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков-3, Университетская, 16. Зак 2479.

5 коп.

